Приложение 2 к РПД
Высшая математика
09.03.01 Информатика и вычислительная техника
направленность (профиль)
Виртуальные технологии и дизайн
Форма обучения – очная
Год набора – 2022

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

1. Общие сведения

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	09.03.01 Информатика и вычислительная техника
3.	Направленность (профиль)	Виртуальные технологии и дизайн
4.	Дисциплина (модуль)	Б1.О.13.01 Высшая математика
5.	Форма обучения	Очная
6.	Год набора	2022

2. Перечень компетенций

– **ОПК-1**: Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности

3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

<table>
<tr><th rowspan="2">Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)</th><th rowspan="2">Формируемая компетенция</th><th colspan="3">Критерии и показатели оценивания компетенций</th><th rowspan="2">Формы контроля сформированности компетенций</th></tr>
<tr><th>Знать:</th><th>Уметь:</th><th>Владеть:</th></tr>
<tr><td>Линейная алгебра</td><td>ОПК-1</td><td rowspan="4">– фундаментальные основы математики;
– основы математических знаний, необходимые для решения профессиональных задач;
– основные понятия и утверждения алгебры и геометрии, их доказательства;
– основные понятия, определения и свойства объектов математического анализа,
– формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства,
– методы математического анализа и моделирования, необходимые для решения профессиональных задач</td><td rowspan="4">– правильно оперировать математическим инструментарием и математической символикой;
– строго доказывать утверждения алгебры, геометрии и математического анализа, формулировать результат, видеть следствия полученного результата;
– определять условия применения того или иного теоретического аспекта при решении практических задач;
– применять методы линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, теоретического и экспериментального исследования для решения задач;
– вычислять пределы, находить производные и вычислять интегралы;
– используя определения, проводить исследования, связанные с основными понятиями;
– использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных;
– применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального</td><td rowspan="4">– навыками применения современного математического инструментария для решения профессиональных задач;
– основами математического моделирования в соответствующей области знаний;
– методами построения математических моделей типовых профессиональных задач;
– навыками использования фундаментальных знаний в области алгебры, аналитической геометрии и математического анализа в профессиональной деятельности</td><td rowspan="2">Выполнение домашних заданий
Контрольная работа «Линейная алгебра»</td></tr>
<tr><td>Векторная алгебра</td><td>ОПК-1</td></tr>
<tr><td>Аналитическая геометрия на плоскости</td><td>ОПК-1</td><td rowspan="2">Выполнение домашних заданий
Контрольная работа «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»</td></tr>
<tr><td>Аналитическая геометрия в пространстве</td><td>ОПК-1</td></tr>
</table>

Этап формирования компетенции	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности
		Знать:	Уметь:	Владеть:	
			исследования в		
Введение в математический анализ	ОПК-1	– фундаментальные основы математики; – основы математических знаний, необходимые для решения профессиональных задач; – основные понятия и утверждения алгебры и геометрии, их доказательства; – основные понятия, определения и свойства объектов математического анализа, – формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства, – методы математического анализа и моделирования, необходимые для решения профессиональных задач	– правильно оперировать математическим инструментарием и математической символикой; – строго доказывать утверждения алгебры, геометрии и математического анализа, формулировать результат, видеть следствия полученного результата; – определять условия применения того или иного теоретического аспекта при решении практических задач; – применять методы линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, теоретического и экспериментального исследования для решения задач; – вычислять пределы, находить производные и вычислять интегралы; – используя определения, проводить исследования, связанные с основными понятиями; – использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных; – применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	– навыками применения современного математического инструментария для решения профессиональных задач; – основами математического моделирования в соответствующей области знаний; – методами построения математических моделей типовых профессиональных задач; – навыками использования фундаментальных знаний в области алгебры, аналитической геометрии и математического анализа в профессиональной деятельности	Выполнение домашних работ Контрольная работа «Предел числовой последовательности. Предел функции в точке» Коллоквиум
Дифференциальное исчисление функции одной переменной	ОПК-1				Контрольная работа «Техника дифференцирования. Применение производной». Коллоквиум
Неопределенный интеграл	ОПК-1				Выполнение домашних работ Контрольная работа «Неопределенный интеграл»
Определенный интеграл	ОПК-1				Выполнение домашних работ Контрольная работа «Определенный интеграл» Коллоквиум

<table>
<tr><th rowspan="2">Этап формирования компетенции</th><th rowspan="2">Формируемая компетенция</th><th colspan="3">Критерии и показатели оценивания компетенций</th><th rowspan="2">Формы контроля сформированности</th></tr>
<tr><th>Знать:</th><th>Уметь:</th><th>Владеть:</th></tr>
<tr><td>Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных</td><td>ОПК-1</td><td rowspan="4">– фундаментальные основы математики;
– основы математических знаний, необходимые для решения профессиональных задач;
– основные понятия и утверждения алгебры и геометрии, их доказательства;
– основные понятия, определения и свойства объектов математического анализа,
– формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства,
– методы математического анализа и моделирования, необходимые для решения профессиональных задач</td><td rowspan="4">– правильно оперировать математическим инструментарием и математической символикой;
– строго доказывать утверждения алгебры, геометрии и математического анализа, формулировать результат, видеть следствия полученного результата;
– определять условия применения того или иного теоретического аспекта при решении практических задач;
– применять методы линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, теоретического и экспериментального исследования для решения задач;
– вычислять пределы, находить производные и вычислять интегралы;
– используя определения, проводить исследования, связанные с основными понятиями;
– использовать математический аппарат для обработки технической информации и анализа данных;
– применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности</td><td rowspan="4">– навыками применения современного математического инструментария для решения профессиональных задач;
– основами математического моделирования в соответствующей области знаний;
– методами построения математических моделей типовых профессиональных задач;
– навыками использования фундаментальных знаний в области алгебры, аналитической геометрии и математического анализа в профессиональной деятельности</td><td>Контрольная работа «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных»
Коллоквиум</td></tr>
<tr><td>Числовые и функциональные ряды</td><td>ОПК-1</td><td>Контрольная работа «Числовые и функциональные ряды»
Коллоквиум</td></tr>
<tr><td>Кратные и криволинейные интегралы</td><td>ОПК-1</td><td>Выполнение домашних работ
Контрольная работа «Кратные интегралы. Криволинейные интегралы»</td></tr>
<tr><td>Дифференциальные уравнения</td><td>ОПК-1</td><td>Выполнение домашних работ
Контрольная работа «Дифференциальные уравнения»
Итоговое тестирование
Решение дополнительных задач</td></tr>
</table>

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы:

«неудовлетворительно» – 60 баллов и менее; «удовлетворительно» – 61-80 баллов; «хорошо» – 81-90 баллов; «отлично» – 91-100 баллов

4. Критерии и шкалы оценивания

4.1. Выполнение домашнего задания

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за выполненное домашнее задание	0,2	0,5	0,8	1

4.2. Выполнение контрольной работы

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за выполнение контрольной работы	5	10	15	20

4.3. Критерии, используемые при оценивании теоретического коллоквиума

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за коллоквиум	3	4-7	8-9	10

Максимальный балл составляет 10 баллов.
1 Этап. Устный опрос по определениям.
Все определения необходимо знать наизусть. Каждое верно сформулированное определение — 1 балл. Необходимо набрать максимум – 3 балла, минимум – 2 балла.
Примечание 1. Если обучающийся не справился с данным этапом, то продолжает осваивать учебную дисциплину самостоятельно до следующей попытки.
Примечание 2. Баллы (2 или 3), полученные за первый этап, могут сохраняться до следующей пересдачи коллоквиума.
2 Этап. Устный вопрос.
При подготовке к ответу на вопрос (в течение 20 минут) считается допустимым использование **собственноручно** написанного конспекта, записей. Использование **иных материалов** и **технических средств** является нарушением правил и достаточным условием для перехода к п. Примечание 1.
Во время ответа преподавателю обучающийся может вести какие-либо записи на **чистом** листе бумаги (о его наличии необходимо позаботиться заранее).
Максимальное количество баллов за ответ на вопрос – 7 баллов (даны все определения, сформулированы и доказаны утверждения, приведены примеры и контрпримеры), минимальное – 5 баллов (даны все определения, сформулированы утверждения, доказательства приведены, но на уровне идеи). Если при ответе обучающийся демонстрирует хорошие результаты самостоятельной работы студента.
3. Во всех иных случаях — коллоквиум не сдан.

4.4. Выполнение теста

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за выполненный тест	1-12	13-16	17-18	19-20

4.5. Решение дополнительных задач

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за решенные дополнительные задачи	5	10	15	20

5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

5.1. Типовое домашнее задание

1. Определить ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; Найти произведение матриц.

3. Найти решение системы уравнений:
[illegible]

4. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

5. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если

$$|\vec{a}|=1, \quad |\vec{b}|=2, \quad |\vec{c}|=3, \quad \vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{c}=\frac{\pi}{3}.$$

Ключ

№ задания	1	2	3	4	5
Правильный ответ	2	$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -7 & 19 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	$(1; 2; 3)$	$\varphi=\arccos\frac{17}{50}$	547

5.2. Типовые контрольные работы

Контрольная работа «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1,2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$ (3, –1).
2. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.
3. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.
4. Найти уравнение плоскости, зная, что точка P (4; -3; 12) – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.
5. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки P (2; 0; -1) и Q (1; -1; 3) перпендикулярно плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$3x - y - 1 = 0$
2	$3x + 2y - 34 = 0$
3	$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1/2}=1$
4	$4x-3y+12z-169=0$
5	$-7x+11y+z+15=0$

Контрольная работа «Предел числовой последовательности. Предел функции в точке»

1. Найти области определения следующих функций:

а) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$; б) $y=\arccos\frac{2x}{1+x}$; в) $y=\sqrt{25-x^2}+\lg\sin x$.

2. Найти пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n-5}{1-n^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{5x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{3x}$, г) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{9x^2+4x-1}$, е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+4}{9x^3-2x}$, ж) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}\right)$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1а	$(-\infty; 1]\cup[5; +\infty)$
1б	$\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$
1в	$[-5; -\pi)\cup(0; \pi)$
2а	-3
2б	$-0{,}1$
2в	$\frac{8}{3}$

2г	$\frac{9}{16}$
2д	$\frac{2}{9}$
2е	0
2ж	$\frac{1}{10}$

Контрольная работа «Техника дифференцирования»

1. Найти производную $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.

2. Найти производную $y=x+\dfrac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$.

3. Найти производную $y=\ln^3(1+\cos x)$.

4. Найти производную $y=ctg(\cos 5)-\dfrac{1}{40}\dfrac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$.

5. Найти производную $y=arctg\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

6. Найти производную $y=\dfrac{shx}{1+chx}$.

7. Найти производную $y=x^{\sin x^3}$.

8. Найти производную $y=\dfrac{4x+1}{16x^2+8x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{4x+1}{\sqrt{2}}$.

9. Найти производную $y=2\arcsin\dfrac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^2+24x+12}$.

10. Найти производную $y=\dfrac{1}{\sin\alpha}\ln(tgx+ctg\alpha)$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$\frac{x}{\sqrt{(1-3x^4)^3}}$
2	$1-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}-\frac{e^x}{1+e^x}$
3	$\frac{-3\sin x\ln^2(1+\cos x)}{1+\cos x}$
4	$\frac{\sin^2 40x+2\cos^2 20x\cos 40x}{2\sin^2 40x}$
5	$\frac{-1-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(x^2+(\sqrt{1+x^2}-1)^2}$
6	$\frac{chx(1+chx)-sh^2x}{(1+chx)^2}$
7	$x^{\sin x^3}\left(3\cos(x^3)\cdot x^2\cdot\ln x+\frac{\sin x^3}{x}\right)$
8	$\frac{-48x^2-24x+7}{(16x^2+8x+3)^2}$
9	$\frac{27x^2+72x+36}{(3x+4)\sqrt{9x^2+24x+12}}$

10	$\dfrac{1}{\sin\alpha\cos^2 x(tgx+ctg\alpha)}$

Контрольная работа «Применение производной»

1. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

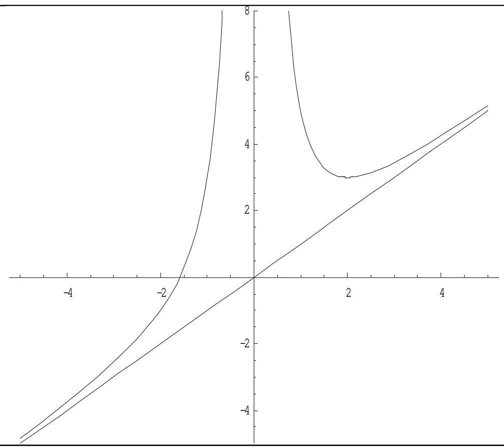
2. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ и построить ее график.

3. Найти точки экстремума функции $y=x(x-1)^3$.

4. Определить ввозрастание и убывание функции, точки экстремума функции $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=3x^4+4x^3+1$ на отрезке $[-2;1]$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$x=0$, $y=x+2$
2	
3	$x=1$ и $x=\dfrac{1}{4}$
4	y′< 0 при любом x ≠ 0, следовательно, функция убывает на всей области определения и не имеет экстремумов
5	$f_{наиб.}=17$ при $x=-2$, $f_{наим.}=0$ при $x=-1$

Контрольная работа «Неопределенный интеграл»

1. Вычислить $\int(x^2-2\sin x+1)dx$
2. Найти неопределенный интеграл $\int\sqrt{\sin x}\cos xdx$.
3. Вычислить применяя формулу интегрирования по частям $\int e^{2x}\cos xdx$.
4. Вычислить $\int\dfrac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$.
5. Вычислить $\int\dfrac{\ln x}{x^3}dx$.
6. Найти интеграл $\int\dfrac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx$.
7. Вычислить $\int\dfrac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx$.
8. Вычислить используя тригонометрическую подстановку $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$\frac{1}{3}x^3+2\cos x+x+C$
2	$\frac{2}{3}\sin^{3/2}x+C$
3	$e^{2x}\sin x+2e^{2x}\cos x-4\int\cos xe^{2x}dx$
4	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+2}\right\rvert+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$
5	$-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$
6	$\frac{7}{6}\ln\left\lvert 36x^2-60x+48\right\rvert+\frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}}+C$
7	$3\ln\lvert x+3\rvert-\frac{1}{x^2+2}+\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$
8	$\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$

Контрольная работа «Определенный интеграл»

1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.

3. Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

4. Найти объем произвольной пирамиды с высотой H и площадью основания S.

5. Вычислить $\int_1^2\frac{x+2}{3-x}dx$.

6. Вычислить $\int_{-1}^0 xe^{-x}dx$

7. Вычислить $\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{4x-2}\,dx$

8. Вычислить $\int_2^5\frac{dx}{2x-3}$

9. Вычислить $\int_0^\pi\left(2x+\sin 2x\right)dx$

10. Вычислить $\int_0^{\lg 2}2^x\cdot 5^x\,dx$

Ключ

№ задания	Правильный ответ	№ задания	Правильный ответ
1	$\frac{\pi}{4}$	6	-1
2	$S=\frac{5}{6}$	7	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
3	$S = 2\pi r$	8	$\frac{1}{2}\ln 7$
4	$V=\frac{1}{3}SH$	9	π^2

5	$5\ln 2-1$	10	$\frac{1}{\ln 10}$

Контрольная работа «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных»

1. Найти полный дифференциал функции $u=x^{y^2z}$.
2. Найти полный дифференциал функции $z=\frac{y}{x^2-y^2}$.
3. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$ в точке $M(1;1;1)$.
4. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u=\sqrt{x^y+\ln z}$ при $x=1$, $y=2$, $z=1$.
5. Найти экстремум функции $f(x;y)=xy$, если уравнение связи: $2x+3y-5=0$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$du=y^2zx^{y^2z-1}dx+2x^{y^2z}yz\ln xdy+y^2x^{y^2z}\ln xdz$
2	$dz=-\frac{2xy}{(x^2-y^2)}dx+\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}dy$
3	$x-2y+z=0$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$
4	$du\approx 1{,}05$
5	$\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$

Контрольная работа «Числовые и функциональные ряды»

1. Если $f(x)=x^3-1$, то коэффициент a_4 разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ равен…
   а) 1; б) 0,25; в) 0; г) 3.
2. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ равен 10, тогда интервал сходимости имеет вид…
   а) $(0;10)$; б) $(-10;10)$; в) $[-5;5]$; г) $(-10;0)$.
3. Второй член a_2 числовой последовательности $a_n=\frac{2^{2n-1}}{2n}$ равен …
4. Установите соответствие между рядами и их названиями.
   1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+3}$.
   а) знакочередующийся; б) знакоположительный; в) степенной.
5. Укажите сходящиеся числовые ряды.
   1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.
6. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^n}$
7. Определить область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$

Ключ

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
Правильный ответ	в	б	2	1-б, 2-а, 3-в	1 и 4	сходится	$(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Контрольная работа «Кратные интегралы. Криволинейные интегралы»

1. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: y = 0, $y = x^2$, x = 2.
2. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1, y = 2.
3. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями $x=0$, $x=y^2$, $y=2$ y = 2.
4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Delta} y\ln x dxdy$, если область интегрирования ограничена линиями $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.
5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2}\int\limits_0^{xy} x^2 yzdzdydx$.
6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x+4$; $x+y-2=0$.
7. Вычислить объем, ограниченный поверхностями: $x^2+y^2=1$; $x+y+z=3$ и плоскостью *XOY*.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$0,8$
2	5
3	$\frac{244}{21}$
4	$\frac{5\ln 2}{4}-\frac{5}{8}$
5	$\frac{1}{104}$
6	$21\frac{1}{3}$
7	$V=3\pi$

Контрольная работа «Дифференциальные уравнения»

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'+y=0$.
2. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'+y=0$.
3. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy'=\frac{-2x}{\cos y}$
4. Решить уравнение $y'=\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)$.
5. Решить уравнение $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0$.

Ключ

№ задания	Правильный ответ
1	$y=\frac{C}{x}$
2	$y=C_1\cdot e^{-x}$
3	$y\sin y+\cos y+x^2+C=0$
4	$y=xe^{Cx}$
5	$x^2-x+xy+3y-y^2=C$

5.3. Примерные дополнительные задачи

1. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Решение. Находим область существования функции. Очевидно, что областью определения функции является область (-∞; -1) ∪ (-1; 1) ∪ (1; ∞).
В свою очередь, видно, что прямые x = 1, x = -1 являются вертикальными асимптотами кривой.
Областью значений данной функции является интервал (-∞; ∞).
Точками разрыва функции являются точки x = 1, x = -1.
Находим критические точки.
Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: x = 0; x = -$\sqrt{3}$; x = $\sqrt{3}$; x = -1; x = 1.
Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

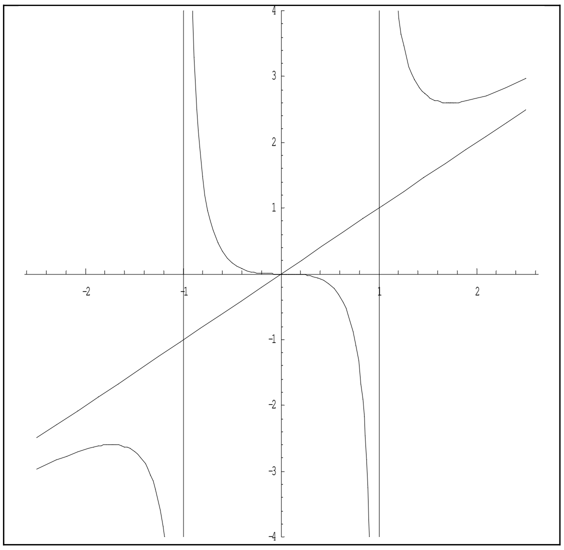
$$= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.
-∞ < x < -$\sqrt{3}$, y″ < 0, кривая выпуклая
-$\sqrt{3}$ < x < -1, y″ < 0, кривая выпуклая
-1 < x < 0, y″ > 0, кривая вогнутая
0 < x < 1, y″ < 0, кривая выпуклая
1 < x < $\sqrt{3}$, y″ > 0, кривая вогнутая
$\sqrt{3}$ < x < ∞, y″ > 0, кривая вогнутая
Находим промежутки возрастания и убывания функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.
-∞ < x < -$\sqrt{3}$, y′ > 0, функция возрастает
-$\sqrt{3}$ < x < -1, y′ < 0, функция убывает
-1 < x < 0, y′ < 0, функция убывает
0 < x < 1, y′ < 0, функция убывает
1 < x < $\sqrt{3}$, y′ < 0, функция убывает
$\sqrt{3}$ < x < ∞, y″ > 0, функция возрастает
Видно, что точка x = -$\sqrt{3}$ является точкой максимума, а точка x = $\sqrt{3}$ является точкой минимума.
Значения функции в этих точках равны соответственно 3 $\sqrt{3}$ /2 и -3 $\sqrt{3}$ /2.
Про вертикальные асимптоты было уже сказано выше. Теперь найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – $y = x$.
Построим график функции:



2. Вычислить интеграл: $\int x^2 \sin x dx$.

Решение. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$

3. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x - 1 + 9}} = \{ dx = d(x+1) \} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \{ x + 1 = t \} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{x+1}{3} + C.$$

4. Вычислить интеграл: $\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

Решение.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \left\{ \begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{matrix} \right\} = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}.$$

5. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ в точке M(1, 1, 1).

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -1; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \qquad x - 2y + z = 0;$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1};$$

6. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2 x$ в точке A(1, 2) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, если B (3, 0).

Решение.

Прежде всего необходимо определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3-1; 0-2) = (2; -2) = 2\vec{i} - 2\vec{j}.$$

Далее определяем модуль этого вектора: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Находим частные производные функции z в общем виде: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2yx$;

Значения этих величин в точке А : $\frac{\partial z}{\partial x} = 6$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 4$;

Для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$ производим следующие преобразования:

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}$$

За величину $\vec{S}$ принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования.

Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Окончательно получаем: $\frac{\partial z}{\partial s} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - значение производной заданной функции по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

1.4. Типовой тест:

1. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ равен…

   а) 7; б) – 7; в) 2; г) –1.

2. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix}$ равен 0 при $\alpha = \ldots$

   а) 3; б) – 3; в) 0; г) 2.

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда $A + B$ равно…

   а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ равен …

   а) 4; б) 3; в) 2; г) 1.

5. Единственное решение имеет однородная система линейных уравнений

   а) $\begin{cases} -3x + 5y = 0 \\ 6x + 10y = 0 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$, в) $\begin{cases} -3x + 5y = 0 \\ 6x - 10y = 0 \end{cases}$, г) $\begin{cases} -4x + y = 0 \\ 8x - 2y = 0 \end{cases}$.

6. Расстояние между точками $B(-3; -4)$ и $D(6; 8)$ равно…

   а) $\sqrt{5}$; б) 5; в) 10; г) 15.

7. Даны точки $A(1; -3)$ и $B(-5; 7)$. Тогда точка $C(x; y)$, которая делит отрезок АВ пополам имеет координаты…

   а) $(-2; 2)$; б) $(2; -2)$; в) $(-3; -2)$; г) $(3; 2)$.

8. Угловой коэффициент прямой $6x - 3y + 8 = 0$ равен…

   а) $\frac{1}{2}$; б) 2; в) – 2; г) $\frac{7}{3}$.

9. Каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=3$ и $b=2$, с центром в начале координат имеет вид…

а) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$; б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=0$; в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; г) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

10. Уравнение параболы имеет вид $y^2=6x$. Тогда директриса задается уравнением…

а) $x=12$; б) $x=-3$; в) $x=6$; г) $x=-1,5$.

11. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}=7\overline{i}+4\overline{j}-2\overline{k}$, $\overline{b}=\left(-\frac{2}{7};\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$.

а) 0; б) 1; в) 2; г) $-1,5$.

12. Вершинами пирамиды служат точки $A(1;2;3)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;5;2)$ и $D(3;0;-2)$. Найти объем пирамиды.

а) 6; б) 24; в) 2; г) 4.

13. Даны две точки $A_1(3;-4;1)$ и $A_2(4;6;-3)$. Найти координаты вектора $\overline{a}=\overline{A_1A_2}$

а) $(-1;10;4)$, б) $(1;10;-4)$, в) $(1;-10;4)$, г) $(-1;10;4)$

14. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;2;3)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;5;2)$.

а) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$, б) $3\sqrt{6}$, в) $\frac{\sqrt{6}}{2}$, г) $\frac{3}{2}$.

15. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=5\vec{q}+\vec{p}$, $\left|\vec{p}\right|=\frac{1}{2},\left|\vec{q}\right|=4,(\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{5\pi}{6}$.

а) 6, б) 12, в) 31, г) 29.

16. Геометрическое место точек, удаленных от плоскости $4x-4y-2z+3=0$ на 2 единицы, может иметь вид…

а) $4x-4y-2z+11=0$, б) $4x-4y-2z+1=0$, в) $4x-4y-2z+5=0$, г) $4x-4y-2z-9=0$

17. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $(2;-1;4)$ на ось *OY*, имеет вид…

а) $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{4}$, б) $\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-4}{0}$, в) $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{4}$, г) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{4}$

18. Каноническое уравнение линии пересечения эллипсоида $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ и плоскости $z-1=0$ имеет вид…

а) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=1$, б) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=1$, в) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$, г) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=-1$

19. Уравнение сферы с центром в точке $C(5;-3;1)$ и радиусом $R=2$ имеет вид…

а) $(x+5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=4$, б) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=4$,

в) $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=2$, г) $(x-5)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=4$.

20. Плоскость пересекается с поверхностью $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=2z$ по…

а) эллипсу, б) гиперболе, в) окружности, г) параболе.

Ключ

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Правильный ответ	б	а	в	г	а	г	а	б	в	г	а	г	б	а	в	г	в	а	б	г

5.5. Вопросы к экзаменам
1 семестр
1. Определение матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами.
2. Обратимые матрицы. Вычисление обратной матрицы. Условия обратимости матриц.
3. Определитель матрицы. Основные свойства определителей.
4. Определители 2 и 3 порядков, их свойства и вычисление.
5. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
6. Теорема Крамера. Решение систем методом Крамера.
7. Решение систем матричным способом.
8. Определение вектора. Линейные операции над векторами.
9. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами.
10. Скалярное произведение двух векторов, его свойства и применение.
11. Векторное произведение двух векторов, его свойства и применение.
12. Смешанное произведение векторов, его свойства и применение.
13. Уравнения прямой на плоскости.
14. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
15. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей в пространстве.
16. Линии второго порядка на плоскости (окружность, эллипс).
17. Линии второго порядка на плоскости (гипербола).
18. Линии второго порядка на плоскости (парабола).
19. Уравнение плоскости в пространстве.
20. Уравнение прямой в пространстве.
21. Прямая и плоскость в пространстве.
22. Уравнение сферы.
23. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
24. Расстояние от точки до плоскости.
25. Угол между прямыми.
26. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
27. Угол между прямой и плоскостью.
28. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
29. Условие принадлежности прямой плоскости.
30. Поверхности второго порядка.

2 семестр
1. Множества и основные операции над ними.
2. Отображения множеств и их виды.
3. Вещественные числа. Простейшее назначение вещественных чисел. Доказательство того, что диагональ единичного квадрата не может быть измерена рациональным числом. Свойства вещественных чисел.
4. Целая и дробная части числа. Абсолютная величина числа. Представление вещественных чисел в виде бесконечной десятичной дроби.
5. Определения ограниченного сверху (снизу) множества, ограниченного множества. Верхняя (нижняя) грань множества. Точная верхняя (нижняя) множества. Свойства точных верхней и нижней граней множества.
6. Свойство полноты множества вещественных чисел (формулировка и доказательство).
7. Леммы об отделимости множеств, о системе вложенных отрезков и последовательности стягивающихся отрезков.
8. Неравенство Бернулли. Числовые последовательности. Определение последовательности, примеры, операции над числовыми последовательностями, ограниченные сверху (снизу), ограниченные последовательности, определения бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей.
9. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей, доказательства того, что $\left\{ q^n \right\}$ и $\left\{ nq^n \right\}$ - бесконечно малые последовательности при $|q| < 1$.
10. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.
11. Предельный переход в неравенствах. Примеры: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
12. Определение монотонных последовательностей. Теорема Вейерштрасса.

13. Число e. Последовательность $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Оценка для $r_n = e - a_n$, где $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Оценка для $r_n = e - c_n$, где $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n!}$.
14. Иррациональность числа e. Постоянная Эйлера. Алгебраические и трансцендентные числа.
15. Определение подпоследовательности и частичного предела. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы. Существование верхнего и нижнего пределов для ограниченной последовательности.
16. Критерий Коши для сходимости последовательности. Пример.
17. Понятие предела числовой функции. Определения отображения, функции, проколотой δ-окрестности, предела по Коши и по Гейне.
18. База множеств. Предел функции по базе. Примеры баз. Доказательство, что совокупности множеств B_0, B_1, ... , B_6 удовлетворяют определению базы. Определение ограниченной и финально ограниченной функции.
19. Свойства пределов функции по базе.
20. Переход к пределу в неравенствах.
21. Критерий Коши существования предела функции по базе.
22. Эквивалентность определений сходимости по Коши и по Гейне.
23. Теоремы о пределе сложной функции (определение сложной функции, теоремы 1 и 2).
24. Теоремы о пределе сложной функции (определение сложной функции, теоремы 3 и 4).
25. Порядок бесконечно малой функции.
26. Свойства функций, непрерывных в точке.
27. Непрерывность функций $y = a^x$, $y = \sin x$.
28. Замечательные пределы.
29. Непрерывность функции на множестве (определения функции, непрерывной на множестве, на отрезке, неубывающей, невозрастающей, строго возрастающей, строго убывающей, монотонной функции, определение точек разрыва, теорема 1 (о точках разрыва монотонной функции на отрезке)).
30. Непрерывность функции на множестве (теорема 2 (критерий непрерывности монотонной функции), теорема 3 (об обратной функции)).
31. Общие свойства функций, непрерывных на отрезке (теорема об обращении функции в нуль, теорема о промежуточном значении непрерывной функции).
32. Общие свойства функций, непрерывных на отрезке (теорема об ограниченности непрерывной функции, теорема о достижении непрерывной функцией точных верхней и нижней граней).
33. 34 Понятие равномерной непрерывности. Теорема Гейне – Кантора.
34. Свойства замкнутых и открытых множеств (определения замкнутого и открытого множества, утверждения 1 и 2).
35. Компакт. Функции, непрерывные на компакте (определения компакта и покрытия, лемма Бореля, обобщение теоремы Гейне – Кантора, примеры, формулировка свойства функции не быть равномерно непрерывной на множестве, определение непрерывности функции в точке относительно данного множества).
36. Приращение функции. Дифференциал и производная функции. Геометрический и механический смысл производной. Связь понятий дифференцируемости и непрерывности функции. Односторонние производные.
37. Дифференцирование сложной функции.
38. Теорема о производной обратной функции, теорема об инвариантности формы первого дифференциала.
39. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций.
40. Производные высших порядков. Формула Лейбница.
41. Дифференциалы высших порядков. Доказательство неинвариантности формы второго дифференциала.
42. Производная функции, заданной параметрически. Примеры функций, заданных параметрически. Производная функции, заданной неявно.
43. Возрастание и убывание функции в точке. Локальные экстремумы. Лемма Дарбу.
44. Теоремы Ролля, Коши и Лагранжа. Следствия.
45. Точки несобственного локального экстремума, теорема Ферма, теорема 4 (еще одна теорема об обращении в нуль производной), теорема 5 (о невозможности для производной иметь точки разрыва первого рода), следствие (теорема Дарбу), бесконечные производные.
46. Раскрытие неопределенностей. Первое правило Лопиталя и следствия из него.
47. Раскрытие неопределенностей. Второе правило Лопиталя и следствия из него.

48. Локальная формула Тейлора.
49. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха – Роша) (случай $a < b$).
50. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха – Роша) (случай $a \ge b$). Частные случаи формулы Тейлора.
51. Применение формулы Тейлора к некоторым функциям.
52. Исследование функций с помощью производных. Экстремальные точки. Достаточные условия достижения функцией локального экстремума в заданной точке.
53. Исследование функций с помощью производных. Выпуклость. Условия выпуклости функции.
54. Точки перегиба. Условия перегиба. Общая схема построения графика функции. Пример.

3 семестр

1 Точная первообразная. Интегрируемые функции.
2 Свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования (замена переменной интегрирования, интегрирование по частям). Таблица интегралов (с доказательствами).
3 Интегрирование дробно-рациональных функций (выделение правильной рациональной дроби, разложение правильной рациональной дроби на простейшие, метод неопределенных коэффициентов, интегрирование правильных рациональных дробей). Метод Остроградского. Примеры.
4 Интегрирование дробно-рациональных функций (интегрирование простейших рациональных дробей вида I – IV, реккурентная формула).
5 Интегрирование тригонометрических выражений и выражений вида $R\left(e^x\right)$.
6 Интегрирование иррациональных выражений.
7 Определение интеграла Римана (неразмеченное разбиение, его свойства, диаметр разбиения, размеченное разбиение, интегральная сумма, определение интеграла Римана, определение функции интегрируемой по Риману, единственность интеграла Римана, интеграл Римана как предел по некоторой базе, ограниченность интегрируемой по Риману функции).
8 Критерий интегрируемости функций по Риману (определения сумм Дарбу, верхнего и нижнего интегралов, леммы 1-6, критерий и его доказательство, примеры про функции Дирихле и Римана).
9 Эквивалентность трех условий интегрируемости функции по Риману.
10 Специальный критерий интегрируемости функции по Риману. Следствие из него.
11 Метод интегральных сумм. Лемма.
12 Классы функций интегрируемых по Риману.
13 Свойства определенного интеграла.
14 Свойства определенного интеграла. Теорема об интегрируемости сложной функции.
15 Аддитивность интеграла Римана (теорема, следствие из нее).
16 Интеграл Римана как функция от его верхнего (нижнего) предела интегрирования. Производная интеграла.
17 Теорема Ньютона – Лейбница.
18 Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.
19 Примеры на формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.
20 Первая теорема о среднем значении интеграла (теорема 1, следствия 1-3).
21 Вторая теорема о среднем значении интеграла (теорема 2).
22 Вторая теорема о среднем значении интеграла (теорема 3, следствие, пример, теорема 4).
23 Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману (определение множества, имеющего лебегову меру нуль, критерий Лебега, применения.
24 Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.
25 Определение несобственных интегралов первого и второго рода.
26 Критерий Коши и достаточные условия сходимости несобственных интегралов.
27 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Абеля и Дирихле.
28 Несобственные интегралы второго рода (основные определения и свойства).
29 Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле.
30 Кривые в многомерном пространстве.
31 Теорема о длине дуги кривой. Следствие. Пример: вычисление длины дуги циклоиды.
32 Площадь плоской фигуры и объем тела. Определение меры Жордана.
33 Критерий измеримости множества по Жордану. Свойства меры Жордана.
34 Измеримость спрямляемой кривой.
35 Связь между интегрируемостью функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.
36 Геометрические приложения определенного интеграла (Площадь криволинейной трапеции. Площадь криволинейного сектора.). Примеры.
37 Геометрические приложения определенного интеграла (Длина дуги кривой). Примеры.

38 Геометрические приложения определенного интеграла (Площадь поверхности вращения). Примеры.
39 Геометрические приложения определенного интеграла (Объем тела). Примеры.
40 Физические приложения определенного интеграла. Центр тяжести кривой. 1-ая теорема Гульдена.
41 Физические приложения определенного интеграла. Центр тяжести криволинейной трапеции. 2-ая теорема Гульдена. Работа переменной силы.
42 Понятие функции n переменных. Основные определения и понятия.
43 Непрерывные функции в $\mathbb{R}^n$.
44 Дифференцируемые функции в $\mathbb{R}^n$.
45 Дифференцирование сложной функции. Примеры.
46 Производная по направлению. Градиент. Примеры.
47 Геометрический смысл дифференциала. Примеры.
48 Частные производные высших порядков. Теоремы Шварца и Юнга. Примеры.
49 Дифференциалы высших порядков. Пример. Невыполнение свойства инвариантности формы для 2-го дифференциала.
50 Формула Тейлора. Пример.
51 Локальный экстремум функции многих переменных (Основные определения, необходимое условие экстремума, определение квадратичной формы, положительная (отрицательная) определенность квадратичной формы, критерий Сильвестра). Примеры.
52 Локальный экстремум функции многих переменных (Регулярная точка, достаточное условие экстремума, достаточные условия строгого экстремума функции двух переменных, примеры). Наибольшее и наименьшее значения функции на компакте. Примеры.
53 Неявные функции. Примеры. Система неявных функций. Примеры.
54 Условный экстремум функции многих переменных. Примеры.
55 Дифференцируемые отображения. Матрица Якоби. Примеры.

4 семестр

1. Числовые ряды (основные определения, утверждение об остаточном члене ряда).
2. Числовые ряды. Утверждение об отбрасывании любого конечного числа членов ряда. Необходимый признак сходимости ряда.
3. Числовые ряды. Критерий Коши. Критерий Коши для расходимости ряда.
4. Ряды с неотрицательными членами (определения, теорема 1 (ограниченность последовательности частичных сумм), признаки сравнения (теоремы 2, 3, следствие из теоремы 2)).
5. Признак Даламбера.
6. Признак Коши.
7. Интегральный признак Коши–Маклорена (с доказательством). Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.
8. Абсолютная и условная сходимость рядов.
9. Ряды Лейбница. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда Лейбница.
10. Формула дискретного преобразования Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$.
11. Перестановки членов ряда. Арифметические операции над сходящимися рядами. Двойные и повторные ряды.
12. Функциональные последовательности и ряды (основные определения). Разложения различных функций по формуле Тейлора как примеры функциональных рядов.
13. Ряд Тейлора. Равномерная сходимость (Определения, теорема 1 (о непрерывности суммы ряда в точке)). Равномерно ограниченные на множестве последовательности. Утверждения 1-4.
14. Критерий равномерной сходимости функциональной последовательности. Критерий Коши и его отрицание.
15. Признаки равномерной сходимости. Критерий равномерной сходимости для бесконечно малой функциональной последовательности, определение мажоранты, признак Вейерштрасса, признаки Абеля и Дирихле.
16. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда. Степенные ряды (основные определения, теоремы). Бесконечные произведения.
17. Определение и условия существования двойного интеграла. Геометрический смысл двойного интеграла. Свойства двойного интеграла.
18. Сведение двойного интеграла к повторному (случай прямоугольной области). Пример.
19. Сведение двойного интеграла к повторному (случай криволинейной области). Пример.
20. Замена переменных в двойном интеграле. Примеры.
21. Геометрические приложения двойных интегралов (вычисление площади фигуры, объема тела и площади поверхности). Примеры.

22. Физические приложения двойного интеграла (вычисление массы материальной пластинки, вычисление координат центра масс и моментов инерции пластинки). Примеры.
23. Определение и вычисление тройных интегралов. Примеры.
24. Замена переменных в тройном интеграле. Примеры.
25. Приложения тройных интегралов. Примеры.
26. Определение криволинейного интеграла первого рода.
27. Вычисление криволинейных интегралов первого рода. Примеры.
28. Определение криволинейных интегралов второго рода, сведение их к определенным интегралам.
29. Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода. Примеры.
30. Формула Грина. Пример.
31. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
32. Интегрирование полных дифференциалов. Примеры.
33. Некоторые приложения криволинейных интегралов 1-го и 2-ого рода. Примеры.
34. Определение дифференциального уравнения первого порядка.
35. Решение дифференциального уравнения. Теорема Коши. Геометрическая интерпретация задачи Коши.
36. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
37. Общее и частное решение уравнения. Примеры.
38. Геометрический смысл дифференциального уравнения.
39. Уравнения с разделяющимися переменными. Примеры.
40. Решение простейших дифференциальных уравнений.
41. Линейные дифференциальные уравнения.
42. Уравнение в полных дифференциалах.
43. Дифференциальные уравнения первого порядка и их применение.
44. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
45. Уравнения высших порядков.
46. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Основные понятия.
47. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.
48. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.
49. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.